Trimestre Abril-Julio 2009
Departamento de Cómputo Científico y Estadística
Estadística para Ingenieros — CO3321
Respuestas guía teórica 3
Estimación

Respuestas

1. Sabemos que
$E(\widehat{\theta}_1) = E(\widehat{\theta}_2) = \theta$, $V(\widehat{\theta}_1) = \sigma_1^2$, $V(\widehat{\theta}_2) = \sigma_2^2$, $y\, \widehat{\theta}_3 = a\,\widehat{\theta}_1 + (1-a)\,\widehat{\theta}_2$.

   a)
$$\begin{aligned} E(\widehat{\theta}_3) &= E(a\,\widehat{\theta}_1 + (1-a)\,\widehat{\theta}_2) \\ &= a\,E(\widehat{\theta}_1) + (1-a)\,E(\widehat{\theta}_2) \\ &= a\,\theta + (1-a)\,\theta \\ &= \theta \end{aligned}$$

   b)
$$\begin{aligned} V(\widehat{\theta}_3) &= V(a\,\widehat{\theta}_1 + (1-a)\,\widehat{\theta}_2) \\ &= V(a\widehat{\theta}_1) + V((1-a)\,\widehat{\theta}_2) \\ &= a^2\,V(\theta_1) + (1-a)^2\,V(\theta_2) \\ &= a^2\,\sigma_1^2 + (1-a)^2\,\sigma_2^2 \end{aligned}$$

   Para hallar el valor de a derivamos la varianza respecto a a, es decir,
$$V^{'}(\widehat{\theta}_3) = 2\,a\,\sigma_1^2 - 2\,(1-a)\sigma_2^2,$$
   igualando a cero, obtenemos
$$2\,a\,\sigma_1^2 - 2\,(1-a)\sigma_2^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$
   Verifiquemos que en realidad a es un mínimo, para ello se calcula la segunda derivada
$$V^{''}(\widehat{\theta}_3) = a\,\sigma_1^2 + 2a\,\sigma_2^2 > 0.$$
   Por lo tanto, a es un mínimo.

2. Sea Y_1, Y_2, Y_3 muestras aleatorias de una distribución exponencial.

   a) Para comprobar que estimadores son insesgados

   a.1
$$E(\widehat{\theta}_1) = E(Y_1) = \int_0^\infty Y_1\,\frac{1}{\theta}\,e^{\frac{-Y_1}{\theta}}\,dY_1 = \theta,$$
   por lo tanto, $\widehat{\theta}_1$ es insesgado.

   a.2
$$E(\widehat{\theta}_2) = E\left(\frac{Y_1 + Y_2}{2}\right) = \frac{1}{2}E(Y_1) + \frac{1}{2}E(Y_2) = \theta.$$

Así, $\widehat{\theta}_2$ es insesgado.

a.3

$$E(\widehat{\theta}_3) = E\left(\frac{Y_1 + 2Y_2}{3}\right) = \frac{1}{3}E(Y_1) + \frac{2}{3}E(Y_1) = \theta.$$

De lo anterior se tiene que $\widehat{\theta}_3$ es insesgado.

a.4 Para verificar si $\widehat{\theta}_4$ es insesgado, se debe hallar la función de densidad del estadístico de orden, que denotaremos como $g_{\widehat{\theta}_4}(y)$* ($F(y)$ es la función de distribución de la variable exponencial Y_i):

$$\begin{aligned} g_{\widehat{\theta}_4}(y) &= n[1 - F(y)]^{n-1} f(y) \\ &= 3[1 - (1 - e^{\frac{-y}{\theta}})]^2 \frac{1}{\theta}\, e^{\frac{-y}{\theta}} \\ &= \frac{3}{\theta}\, e^{\frac{-3y}{\theta}} \end{aligned}$$

Donde $g_{\widehat{\theta}_4}(y) \sim Exp\,(3/\theta)$.

$$E(\widehat{\theta}_4) = \int_0^\infty y \frac{3}{\theta}\, e^{\frac{3y}{\theta}}\, dy = \frac{\theta}{3}$$

De lo anterior se concluye que $\widehat{\theta}_4$ no es insesgado.
* No se detalla cómo encontrar la forma de la función del mínimo. En el problema 7 se describe cómo hacerlo para el máximo, puede deducirla de manera similar o remitirse a la bibliografía.

a.5

$$E(\widehat{\theta}_5) = E\left(\frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}\right) = \frac{1}{3}E(Y_1) + \frac{1}{3}E(Y_2) + \frac{1}{3}E(Y_3) = \theta.$$

Así, $\widehat{\theta}_5$ es insesgado.

b) Para verificar entre los estimadores insesgados, cual presenta menor varianza, se debe recordar que

$$V(x) = E(x^2) - (E(x)^2).$$

b.1

$$V(\widehat{\theta}_1) = E(Y_1^2) - (E(Y_1)^2) = \theta^2.$$

b.2

$$V(\widehat{\theta}_2) = \left(\frac{Y_1) + Y_2}{2}\right) = \frac{\theta^2}{2}.$$

b.3

$$V(\widehat{\theta}_3) = \left(\frac{Y_1 + 2Y_2}{3}\right) = \frac{5\,\theta^2}{9}.$$

b.4

$$V(\widehat{\theta}_5) = \left(\frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}\right) = \frac{\theta^2}{3}.$$

Así, la menor varianza es de $\widehat{\theta}_5$.

3. Sea $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de una población con distribución Exponencial de parámetro $(\theta + 1)$.
   Se propone como estadístico $\widehat{\theta}_1 = \bar{y} - 1$ y verifiquemos que es un estimador insesgado,
   $$E\left(\widehat{\theta}_1\right) = E(\bar{y}) - 1 = \frac{E(\Sigma y_i)}{n} - 1 = \frac{n(\theta+1)}{n} - 1 = \theta$$
4. Sea $Y \sim Poiss(\lambda)$, $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de observaciones sobre la cantidad semanal de descomposturas.

   a) Se sugiere como estimador $\widehat{\lambda_1} = \bar{y}$, y se pasa a verificar que es un estimador insesgado para λ.
   $$E(\widehat{\lambda_1}) = E(\bar{y}) = \frac{E(\Sigma y_i)}{n} = \frac{nE(y)}{n} = \lambda$$
   b) Sea $C = 3y + y^2$. Se debe demostrar que $E(C) = 4\lambda + \lambda^2$.
   $$E(C) = 3E(y) + E(y^2) = 3\lambda + \lambda + \lambda^2 = 4\lambda + \lambda^2.$$
   c) Para responder este inciso, calculemos $E(\bar{y}^2)$, sabiendo que $V(\bar{y}) = E(\bar{y}^2) - E(\bar{y})^2$:
   $$\begin{aligned} E(\bar{y}^2) &= V(\bar{y}) + E(\bar{y})^2 \\ &= \frac{nV(y)}{n^2} + \left[\frac{nE(y)}{n}\right] \\ &= \frac{V(y)}{n} + E(y)^2 \\ &= \frac{\lambda}{n} + \lambda^2 \qquad (1) \end{aligned}$$
   Consideremos $\hat{e_1} = \widehat{E(C_1)} = 3\bar{y} + \bar{y}^2$. Verifiquemos que $\hat{e_1}$ es un estimador insesgado
   $$\begin{aligned} E(\hat{e_1}) &= 3E(\bar{y}) + E(\bar{y}^2) \\ &= \frac{3E(\Sigma y)}{n} + \underbrace{\frac{\lambda}{n} + \lambda^2}_{usando(1)} \\ &= 4\lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$
5. Sea Y= lectura del voltímetro; θ = voltaje real del circuito, $Y \sim Unif(\theta, \theta + 1)$ donde
   $$E(Y) = \frac{\theta + \theta + 1}{2} = \frac{2\theta + 1}{2},\ V(\theta) = \frac{(\theta + 1 - \theta)^2}{12} = \frac{1}{12}.$$
   a) Se debe demostrar que $\bar{Y}$ es un estimador sesgado,
   $$E(\hat{\theta}_1) = E\left(\frac{\Sigma Y_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \frac{n}{n}\frac{2\theta+1}{2} = \frac{2\theta+1}{2} \neq \theta.$$
   Calculemos el sesgo,
   $$B(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_1) - \theta = \frac{2\theta+1}{2} - \theta = \frac{1}{2}.$$

b) Sea $\hat{\theta}_2 = \bar{Y} - \frac{1}{2}$ una función de $\bar{Y}$. Verifiquemos que es un estimador insesgado de θ,

$$E(\hat{\theta}_2) = E(\bar{Y}) - E\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\theta + 1}{2} - \frac{1}{2} = \theta.$$

c) $V(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{n^2} V(\Sigma Y_i) = \frac{1}{12n}$.
Así,

$$MSE(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{12n} + \left(\frac{1}{2}^2\right) = \frac{1 + 3n}{12n}.$$

6. Sea $Y \sim Bin(n, p)$, donde $E(Y) = np$ y $V(Y) = npq$, con $q = 1 - p$.

   Consideremos el estimador $\hat{p_1} = \frac{Y}{n}$, donde $E(\hat{p_1}) = \frac{E(Y)}{n} = p$.

   a) Previamente, observe que

   $$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 \Longrightarrow E(Y^2) = np(1 - p) + n^2 p^2.$$

   Sabemos que $\sigma^2 = V(Y)$.
   Veamos que el estimador sugerido $\hat{\sigma}_1^2$ es sesgado, el cual esta definido como,

   $$\hat{\sigma}_1^2 = n\frac{Y}{n}\left(1 - \frac{Y}{n}\right) = Y - \frac{Y^2}{n}.$$

   Así,

   $$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_1^2) &= E(Y) - \frac{1}{n}E(Y^2) \\ &= np - \frac{1}{n}(npq + n^2p^2) \\ &= npq - pq \neq npq \end{aligned}$$

   b) Consideremos $\hat{\sigma}_2^2 = n\frac{Y}{n}\left(1 - \frac{Y}{n}\right)\frac{n}{n-1} = \frac{nY}{n-1} - \frac{Y^2}{n-1}$ y verifiquemos que $\hat{\sigma}_2^2$ es un estimador insesgado

   $$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}_2^2) &= \frac{n}{n-1}E(Y) - \frac{1}{n-1}E(Y^2) \\ &= \frac{n}{n-1}np - \frac{1}{n-1}[np(1-p) + n^2p^2] \\ &= np(1-p) \\ &= npq \end{aligned}$$

7. Sea $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ una muestra aleatoria de una densidad, donde $\alpha > 0$ y conocido, pero θ es desconocido.

   Si $\hat{\theta}$ es máximo, entonces

   $$\{\hat{\theta} \leq y\} = \{Y_1 \leq y, .., Y_n \leq y\}.$$

Si Y_i son iid, entonces,

$$\begin{aligned} P(\hat{\theta} \leq y) &= P(Y_1 \leq y, .., Y_n \leq y) \\ &= P(Y_1 \leq y)P(Y_2 \leq y)...P(Y_n \leq y) \\ &= [P(Y_i \leq y)]^n. \end{aligned}$$

Entonces,

$$G_{\hat{\theta}}(y) = [P(Y_i \leq y)]^n = F(y)^n.$$

Luego,

$$g_{\hat{\theta}}(y) = n[F(y)]^{n-1} f(y),$$

que es el caso general; en nuestro caso,

$$G_{\hat{\theta}}(y) = \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\theta^n} y^{\alpha-1} dy = \frac{y^{\alpha}}{\theta^{\alpha}},$$

y

$$f_{\hat{\theta}}(y) = \frac{ny^{\alpha(n-1)}}{\theta^{\alpha(n-1)}} \frac{\alpha y^{\alpha-1}}{\theta^{\alpha}} = \frac{n\alpha}{\theta^{\alpha n}} y^{\alpha n-1}$$

a)

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= \int_0^{\theta} y \frac{n\alpha}{\theta^{\alpha n}} y^{\alpha n-1} dy \\ &= \frac{n\alpha}{\theta^{\alpha n}} \int_0^{\theta} y^{\alpha n} dy \\ &= \frac{\alpha n}{\alpha n+1} \theta \neq \theta \end{aligned}$$

b) Consideremos $\hat{\theta}_2 = \frac{\alpha n+1}{\alpha n}\hat{\theta}$ un múltiplo de $\hat{\theta}$. Verifiquemos que $\hat{\theta}_2$ es un estimador insesgado de θ.

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta_2}) &= \int_0^{\theta} \frac{\alpha n+1}{\alpha n} y \frac{\alpha n}{\theta^{\alpha n}} y^{\alpha n-1} dy \\ &= \frac{\alpha n+1}{\theta^{\alpha n}} \int_0^{\theta} y^{\alpha n} dy \\ &= \theta \end{aligned}$$

c) Sabemos que $V(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - E(\hat{\theta})^2$.
Luego,

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}^2) &= \int_0^{\theta} y^2 \frac{\alpha n}{\theta^{\alpha n}} y^{\alpha n-1} dy \\ &= \frac{\alpha n}{\theta^{\alpha n}} \int_0^{\theta} y^{\alpha n+1} dy \\ &= \frac{\alpha n}{\alpha n+2} \theta^2. \end{aligned}$$

Para la varianza tenemos que,

$$\begin{aligned} V(\hat{\theta}) &= \frac{\alpha n}{\alpha n+2}\,\theta^2 - \left(\frac{\alpha n}{\alpha n+1}\,\theta\right)^2 \\ &= \frac{\alpha n}{\alpha n+2}\,\theta^2 - \frac{(\alpha n)^2}{(\alpha n+1)^2}\,\theta^2 \\ &= \frac{\alpha n}{(\alpha n+1)^2(\alpha n+2)}\theta^2. \end{aligned}$$

Y para el sesgo,

$$\begin{aligned} B(\hat{\theta}) &= \frac{\alpha n}{\alpha n+1}\theta - \theta = \left(\frac{\alpha n}{\alpha n+1} - 1\right)\theta \\ &= \frac{\theta}{\alpha n+1} \end{aligned}$$

Así, $MSE(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + \left(B(\hat{\theta})^2\right)$,

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}) &= \frac{\alpha n}{(\alpha n+1)^2+(\alpha n+1)}\,\theta^2 + \left(\frac{\theta}{\alpha n+1}\right)^2 \\ &= \frac{2\theta^2}{(\alpha n+1)(\alpha n+2)}. \end{aligned}$$

8. $y_1, y_2, ..., y_n$ una muestra aleatoria de $y \sim N(\mu, \sigma^2)$

   a) El resultado 4.90 del libro de Wackerly, Mendenhall y Sheaffer indica que si la variable aleatoria y se distribuye según una Gamma de parámetros α y β, entonces se puede demostrar que $E(y^a) = \frac{\beta^\alpha \Gamma(\alpha+a)}{\Gamma(\alpha)}$.
   Ahora bien, se sabe que si y se distribuye Normal con media μ y varianza σ^2, entonces la variable W se distribuye Chisq con $(n-1)$ grados de libertad, donde $W = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$.
   Como sabemos que la distribución Chisq es un caso particular de una Gamma, podemos decir entonces que $W \sim Gamma\left(\frac{n-1}{2}, 2\right)$. Aplicando entonces el resultado 4.90, se deduce que:

$$E(W^{\frac{1}{2}}) = \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{2}$$

   Ahora, si $W = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$ entonces $W^{\frac{1}{2}} = (n-1)^{\frac{1}{2}}\frac{S}{\sigma}$. Con lo cual:

$$E(W^{\frac{1}{2}}) = \frac{(n-1)^{\frac{1}{2}}}{\sigma}E(S) \tag{3}$$

   Igualando (2) y (3):

$$\frac{(n-1)^1 2}{\sigma}E(S) = \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

   De donde $E(S) = \frac{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)^1 2\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sigma$ Con lo que se demuestra que el estimador $\widehat{\sigma_1} = S$ es sesgado.

b) $\widehat{\sigma_2} = \frac{(n-1)^1 2\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\widehat{\sigma_1} = \frac{(n-1)^1 2\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} S$
Se verifica que $\widehat{\sigma_2}$ es insesgado.

9. Si $\widehat{\theta} = Y_{(1)}$ donde $Y_{(1)} = min(Y_1, \ldots, Y_n$, calculamos la f.d.p de $Y_{(1)}$, A saber: $f_{Y_{(1)}}(y) = n\,[1 - F(y)]^{n-1}\; f(y)$. Luego:

$$\begin{aligned} f_{Y_{(1)}}(y) &= n\left[1 - \left(1 - e^{-\frac{y}{\theta}}\right)\right]^{n-1}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{y}{\theta}} \\ &= \frac{n}{\theta}e^{-\frac{n}{\theta}y} \text{ Si } y \geq 0 \end{aligned}$$

Puede observarse que $Y_{(1)} \sim Exp(\frac{n}{\theta})$, por lo cual $E(Y_{(1)}) = \frac{\theta}{n}$.
Finalmente, $E(\widehat{\theta}) = nE(Y_{(1)}) = \frac{n\theta}{n} = \theta$. Y se demuestra que el estimador $\widehat{\theta} = nY_{(1)}$ es insesgado.

10. *a*) Se estima con un límite de 2 desviaciones estandar para el error a partir del estimador puntual $\bar{x} = 11{,}3$:

$$\begin{aligned} \mu &\in \bar{x} \pm 2\sigma_{\bar{x}} \\ &\in 1{,}3 \pm \frac{16{,}6}{\sqrt{467}} \\ &\in 11{,}3 \pm 1{,}54 \end{aligned}$$

b) Se estima con un límite de 2 desviaciones estandar para el error:

$$\begin{aligned} \mu_1 - \mu_2 &\in \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm 2\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} \\ &\in (46{,}4 - 45{,}1) \pm 2\left(\sqrt{\frac{10{,}2^2}{467} + \frac{9{,}8^2}{191}}\right) \\ &\in 1{,}3 \pm 1{,}7 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &\in \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm 2\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} \\ &\in (0{,}78 - 0{,}61) \pm 2\left(\sqrt{\frac{0{,}78x0{,}22}{467} + \frac{0{,}61x0{,}39}{191}}\right) \\ &\in 0{,}17 \pm 0{,}0802 \end{aligned}$$

13. *a*) Sea X_1=número de estadounidenses que consumían fibra en 1983 y X_2=número de estadounidenses que consumían fibra en 1992.
$X_1 \sim Bin(1250, 0{,}59)$ y $X_2 \sim Bin(1251, 0{,}53)$, pero al ser n_1 y n_2 *grandes*, $p_1 = \frac{X_1}{n_1}$ y $p2 = \frac{X_2}{n_2}$ se distribuyen aproximadamente normal (de acuerdo al TCL), así que la estimación puntual será: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0{,}59 - 0{,}53 = 0{,}06$.

El error en la estimación (usando un coeficiente de confianza de 95 será: 0,0388

b) $0{,}06 \pm 0{,}0388 = (0{,}0212, 0{,}0988)$ Como este intervalo NO contiene al cero, quiere decir que la proporción de estadounidenses que consumían fibra en 1983 es mayor a la de 1992, por lo tanto sí disminuyó el consumo.

14. I.C. de 98 % para la diferencia de proporciones $0{,}06 \pm 2{,}325 \times 0{,}01981545 = 0{,}06 \pm 0{,}046$. Entonces, el intervalo quedaría: (0.0139, 0.106). Este intervalo es más estrecho que el anterior, pero sigue siendo igual la conclusión: el consumo de fibra sí disminuyó (aunque poco) entre 1983 y 1992.

15. Sabemos que $V(y) = \lambda$ y que $E(\bar{y}) = \lambda$; $V(\bar{y}) = \frac{\lambda}{n}$.
    Luego, utilizaría $\hat{\lambda} = \bar{y}$ como estimador del parámetro porque es un estimador insesgado.
    El error estandar de$\hat{\lambda}$ es $\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{V(\bar{y})} = \sqrt{\frac{\lambda}{n}}$.

16. a) $\hat{\lambda}_A = 20p/uv$ y $\epsilon = 2\sigma_{\hat{\lambda}_A} = 2\sqrt{\frac{20}{50}} = 1{,}2649$

    b) $\theta = \lambda_A - \lambda_B$ luego, $\hat{\theta} = \bar{x}_A - \bar{x}_B = -3p/uv$
    Ahora, $V(\hat{\theta}) = V(\bar{x}_A - \bar{x}_B)$ y como las muestras son independientes: $V(\hat{\theta}) = V(\bar{x}_A) + V(\bar{x}_B) = \frac{\lambda_A}{n_A} + \frac{\lambda_B}{n_B}$. Por lo tanto, $\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{\bar{x}_A}{n_A} + \frac{\bar{x}_B}{n_B}}$.
    Con este resultado calculamos un límite para el error de estimación:$\epsilon = 2\sigma_{\hat{\theta}} = 1{,}8547p/uv$.
    Con probabilidad de al menos 75 % (usando el teorema de Tchebyshev) el verdadero valor de la diferencia se encuentra entre -4.8547 y -1.1453 p/uv, con lo cual se puede afirmar que el método B produce en promedio más puntos de nucleación (la diferencia es negativa con alta probabilidad para un error menor a 2 desviaciones tipicas).

18. a) Si $y \sim Unif(0, \theta)$ entonces $f(y) = \frac{1}{\theta}$ y $F(y) = \frac{y}{\theta}$. Ahora, si denotamos $f_{y_n}(y)$ a la f.d.p. del máximo, tenemos que: $f_{y_n}(y) = \frac{n}{\theta^n} y^{n-1}$ y $F_{y_n}(y) = \frac{y}{\theta}^n$.
    Ahora, si $U = \frac{1}{\theta} y_{(n)}$ entonces

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(\frac{1}{\theta} y_{(n)} \leq u) = P(y_{(n)} \leq \theta u)$$

    Para establecer el dominio de U:
    cuando $y_{(n)} = 0 \rightarrow u = 0$ y
    cuando $y_{(n)} = \theta \rightarrow u = 1$.
    Luego:
    - Si $u < 0 \Rightarrow P(y_{(n)} \leq \theta u) = 0$ porque θu es negativo y por definición $\theta > 0$ (θ tomaría valores negativos).
    - Si $0 \leq u \leq 1 \Rightarrow P(y_{(n)} \leq \theta u) = \left(\frac{\theta u}{\theta}\right)^n = u^n$.
    - Si $u > 1 \Rightarrow P(y_{(n)} \leq \theta u) = 1$ porque θu es mayor que θ y por definición $0 \leq y \leq \theta$ (entonces el mínimo siempre será más pequeño que un valor mayor que θ).

    Por lo tanto, se demuestra que:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u^n & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases}$$

b) Hallamos un valor b que aporte un límite unilateral para un intervalo de 95 %:

$$P(U < b) = b^n = 0{,}95 \Rightarrow b = \sqrt[n]{0{,}95}$$

Luego:

$$P(U < \sqrt[n]{0{,}95}) = P\left(\frac{1}{\theta} y_{(n)} < \sqrt[n]{0{,}95}\right) = P\left(\frac{y_{(n)}}{\sqrt[n]{0{,}95}} < \theta\right)$$

de donde se obtiene que $L_I = \frac{y_{(n)}}{\sqrt[n]{0{,}95}}$.